Edmonds-Karp

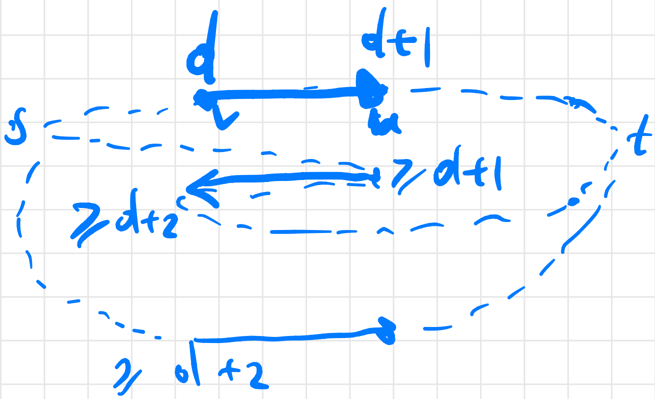
Lm: $\forall v: \ dist_{G_f}(s, v) \nearrow$

Lm E-K делает $O(VE)$ итераций поиска пути

$\min c_e - f_e$

$f'_e = c_e$

Каждое ребро критичное $\leq \frac{V}{2}$ раз.



Между двумя последов. фазами когда мы толкаем поток по критичному (ор.) ребру e $dist_{G_f}(v)$ растёт хотя бы на 2

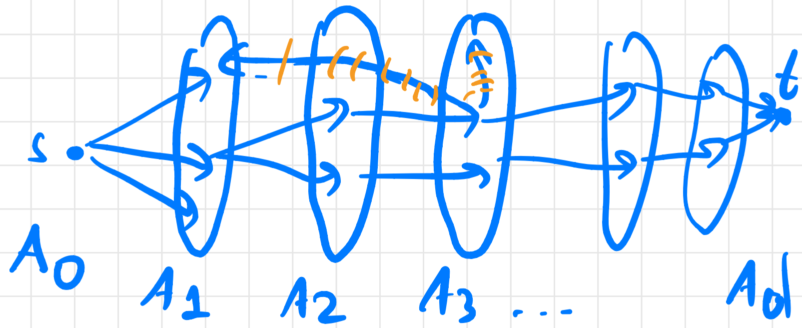
Следствие: Э-К работает за $O(VE^2)$

Алгоритм Диница
Dinic

Ефим Диниц

while bfs() из s находит t.

1) разбить вершины по слоям.
2) $G_L :=$ оставим в графе только рёбра из A_i в A_{i+1} $\forall i$
3) while в G_L $\exists$ путь $s \to t$
4) увеличить по нему поток

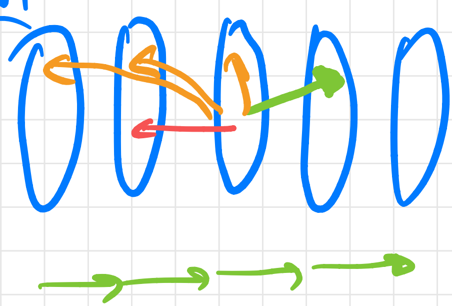


Lm В процессе (3) все возможные пути в G_f из s в t длины d имеют вид $p_0 \dots p_d$ (иначе говоря, $p_0 \dots p_d \in G_L$)

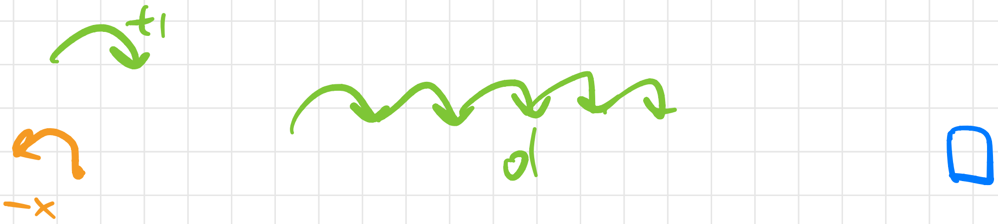
$p_i \in A_i$

Proof

классиф. $E(G_f)$: 



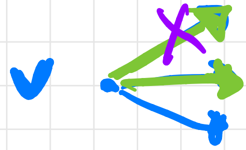
1) 



Следств: после (3) закончится, путей длины d больше нет

```python
ans = 0
# bfs() вычисляет dist[] и возвращает True, если dist[T] != inf.
while bfs():
    headcopy = list(head) # копировать массив head.

    while (delta := find_flow(S, int(1e9), headcopy)):
        ans += delta
```

```python
def find_flow(v, max_cap, head):
    if v == T:
        return max_cap

    while True:
        e = head[v]
        if e == -1:
            return 0

        limit = min(edges[e].cap - edges[e].flow, max_cap)

        if limit and dist[edges[e].to] == dist[v] + 1 \
        and (result := find_flow(edges[e].to, limit, head)):
            edges[e].flow += result
            edges[e^1].flow -= result
            return result
        else:
            head[v] = edges[e].nxt
```

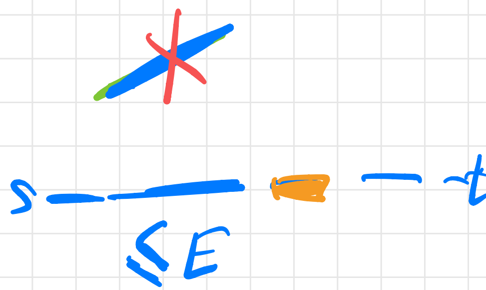


find_flow

head[v] = edges[i].nxt

Время работы

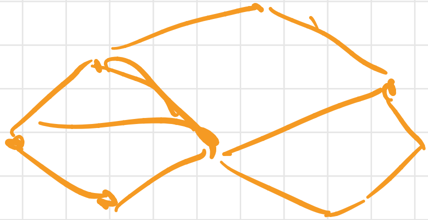
$$\underbrace{V}_{\text{фаз}} \cdot (E + VE)$$



обрабатывается за V

$$= O(V^2 E)$$

Min cost Flows



$$\xrightarrow[w_e]{c_e}$$

$$\min_{e \in E} f_e \cdot w_e$$

e-не обр.

$$\xleftarrow[-w_e]{c_{e'} = 0}$$

- Min Cost Max flow
  (среди потоков $|f| \to \max$
  $cost(f) \to \min$)

- Min Cost K-flow

- Min Cost

- Min Cost Circulation
  (= Min Cost 0-flow)

Thm: f — минимальный по стоимости поток размера $|f|$ $\Leftrightarrow$ в G_f $\nexists$ отр. цикла.

Д-во: "$\Rightarrow$" — очевидно

"$\Leftarrow$"

Пусть g — лучший поток, $|g| = |f|$, $cost(g) < cost(f)$

Пусть $h = g - f$ $\qquad \xrightarrow{c_e - f_e}$

Тогда h — поток в G_f

1) $h_e = g_e - f_e = f_{e'} - g_{e'} = -h_{e'}$

2) $\forall v \notin \{s, t\}$:

$$0 \stackrel{?}{=} \sum_{e \in \delta^{-1}(v)} h_e = \sum_{e \in \delta^{-1}(v)} g_e - f_e = 0$$

3) $h_e = g_e - f_e \leq \boxed{c_e - f_e}$ пропускн. способн в G_f.

$g_e \leq c_e$

Def: f - антисимметричное, если $f_e = -f_{e'}$

$$|h| = |g| - |f| = 0$$

h - циркуляция,

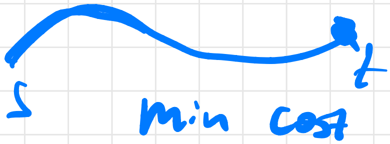
$$cost(h) = cost(g) - cost(f) < 0$$

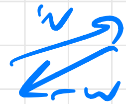
Противоречие с тем что в G_f нет отр. цикла

$\square$

Successive Shortest Paths

Min Cost k-flow
(Max) flow





Алгоритм Min Cost Max-flow:

$f = 0$

While в G_f $\exists$ путь $s \to t$ $\qquad |f|$

$\quad P$ – мин. по весу путь $s \to t$

$\quad f \mathrel{+}= P \cdot \min\limits_{e \in P} c_e - f_e$

$O(|f| \cdot VE)$

Min cost k-flow:

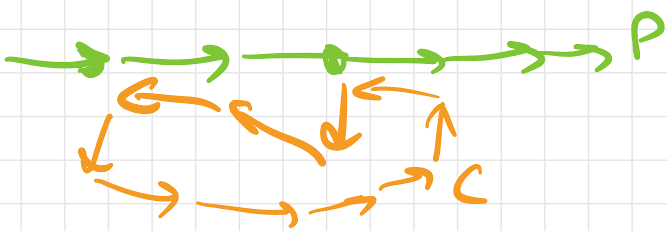
то же самое, но только k потока.

Lm: Пусть f - опт. поток размера $|f|$, p - кр. путь в G_f (умнож. на $\min c_e - f_e$), тогда $f+p$ - опт. поток размера $|f+p|$

Д-во: Рассмотрим $f+p$.

Пусть $f+p$ - не опт. поток размера $|f+p|$ $\Rightarrow$ в G_{f+p} есть отр. цикл C

Если C есть и в G_f, то победа, f - не опт. тоже, противоречие



Рассмотрим $f + P + C$. Это поток в G.

$\Rightarrow$ $P + C$ — поток в G_f

$$P+C = \sum_{i=1}^{k} q_i + c'$$

Декомп. потока

пути цикл. (не содержат e и e' одновр

$\Rightarrow$ q_i — поток в G_f

и

c' — поток в G_f

$$\mathrm{cost}\left(\sum_{i=1}^{k} q_i\right) \geq \mathrm{cost}(P)$$

(по опр. P, P-кр. путь)

$$\Rightarrow \mathrm{cost}(c') \leq \mathrm{cost}(C)$$

$$\mathrm{cost}(C) < 0$$

$\Rightarrow \mathrm{cost}(C') < 0$

$\Rightarrow C'$ – отр. циркул. в G_f

$\Rightarrow$ в G_f есть отр. цикл.

$\Rightarrow f$ – неопт., противоречие $\square$

<u>Следствие</u>: если в G_0 нет отр. циклов, то S.S.P. – корректный.

<u>Время работы</u>: $O(|f| \cdot VE)$

Min Cost k-flow

Сводится к MC-circulation

= any k-flow + мин. цирк. в ост. сети

Min Cost Circulation

f — опт. поток размера $|f|$, если в G_f нет отр. циклов.

Клейна 1967

Cycle Cancelling

1) $f = 0$

$\downarrow$

2) $\exists$ ли в G_f отр. цикл C?

нет $\to$ победа

$\downarrow$

3) $f += C$

Наблюдение: Если capacity — целые,

$\Rightarrow$ Алг. конечен.

Remark: тоже потенциально работает за exp от входа.

Lm: Пусть все целые

Алгоритм делает $\leq E \cdot C \cdot W$ шагов,

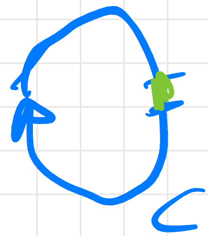
где $C = \max c_e$

$W = \max w_e$

Min Mean Cycle Cancelling

Цикл мин среднего веса:

$$\frac{w(C)}{|C|}$$



Rem 1) Цикл Min ср. веса можно найти за $O(VE)$

Rem 2) Достаточно poly(V, E) шагов, чтобы получить опт.

Capacity Scaling

Def: Псевдопоток:

Min Cost 0-flow

1) $f_e = -f_{e'}$
2) $f_e \le c_e$.

Нет условия на сохр. потока.

Def: $exc_v = \sum\limits_{e\in\delta^+(v)} f_e$

(excess)

Поток = Псевдопоток + $\forall v \notin \{s,t\}$, $exc_v = 0$

Def: $E_f(\Delta) = \{e \in G_f : c_e^{G_f} \geq \Delta\}$

$S(\Delta) = \{v \in V : exc_v \geq \Delta\}$

$T(\Delta) = \{v \in V : exc_v \leq -\Delta\}$

Def: p - потенциал. в G:

$\forall e = (v,u) \in E(G)$, $w_e + p_v - p_u \geq 0$

$\overset{+}{v} \longrightarrow \overset{-}{u}$

$p_u \leq p_v + w_e$

Def: $w^p_e := w_e + p_v - p_u$

Инвариант алгоритма:

$\forall e \in E_f(\Delta)$ $w^p_e \geq 0$

Идея Алг.

$\Delta \to \Delta/2 \to \Delta/4 \to \dots \to 0$

получить инвариант

$\forall e \in E(G_f) \quad w^p_e \geq 0$

$\Uparrow$

в G_f нет отр. циклов

Алгоритм:

$f = 0$

$p = 0$

for $k = \lceil \log C \rceil \dots 0$:

$\quad \Delta = 2^k$ // $k \to k-1$ ло маются рiбра

(**) for $e \in E_f(\Delta)$

$\quad\quad$ if $w^p_e < 0$:

$\quad\quad\quad$ насытим это ребро

починим рёбра

$O(nm)$ (*) while $S(\Delta) \neq \varnothing$ и $T(\Delta) \neq \varnothing$

$a \leftarrow S(\Delta)$

$b \leftarrow T(\Delta)$

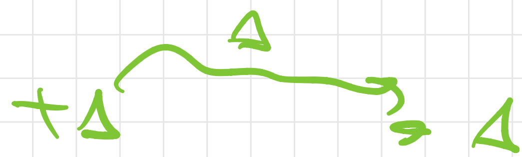
пустить Δ потока по кр. $a - b$ пути в $E_f(\Delta)$ в весах w_e^p

(***) пересчитать потенциалы

псевдопоток

$\Downarrow$

поток



Def: $e^+ = \sum\limits_{v:\, exc_v > 0} exc_v$, $\quad e^- = \sum\limits_{v:\, exc_v < 0} -exc_v$

Lm: $e^+ = e^-$, т.к. $\sum\limits_v exc_v = 0$

Lm: в конце алгоритма псевдопоток f - поток

Д-во в конце алгоритма $\Delta = 1$ и $\big(S(\Delta) = \varnothing$ или $T(\Delta) = \varnothing\big)$

$$S(\Delta)=\varnothing \Rightarrow e^+ = 0 \qquad T(\Delta)=\varnothing \Rightarrow e^- = 0$$

$\Rightarrow$ в обоих случаях $c^+ = c^- \Rightarrow$

<u>Lm</u>: К моменту (*), $c^+ \leq 2\Delta(n+m)$

<u>Следствие</u>: цикл while в (*) работает $O(m)$ шагов

<u>Следствие</u>: время работы алгоритма

$$O(\log C \cdot m \cdot m \log n)$$

$$= O(m^2 \log n \log C)$$

<u>Д-во леммы</u>: после пред. итерации вн. цикла или $S(2\Delta) = \varnothing$, или $T(2\Delta) = \varnothing$.

Т.е. после прошлой итерации вн. цикла или $c^+ \leq 2\Delta n$, или $c^- \leq 2\Delta n$

в цикле (**), мы протолкнем поток

только у рёбер с $c_e^{G_f} \in [\Delta, 2\Delta]$

Значит увеличение избытка произошло

не более чем на $2\Delta m$

<u>Rem</u>: Мы предположили что поток

можно толкнуть от любой $a \in S(\Delta)$

в любую $b \in T(\Delta)$.

Можно добавить фикт. рёбер с

$c_e = \infty$, $w_e = +\infty$.

т.е. опт. ответ точно не исп. эти

рёбра

<u>Rem</u> Шаг (***) можно делать

или в потенц. Джонсона